Über die Bestimmung von Punktgruppen aus ihren Polaren.

Von **Emil Waelsch,**
ord. Hörer an der deutschen technischen Hochschule zu Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. October 1883.)

Im Juni l. J. hatte ich die Ehre der hohen Akademie eine Arbeit zu unterbreiten, welche sich mit der Bestimmung von Polargruppen für gegebene Pole und Fundamentalsysteme beschäftigte. Im nachfolgenden Aufsatze möge mir gestattet sein, die Umkehrung dieses Problems, nämlich die Bestimmung der Punktgruppen, welche gegebene Punkte zu Punkten ihrer Polaren besitzen, vorzuführen.

1. Um die folgenden Entwickelungen durch Citirung von nothwendigen Hilfssätzen aus der Theorie der Involutionen n-ter Ordnung k-ter Stufe (siehe die Abhandlungen von Professor Dr. Emil Weyr, Bd. 79 der Sitzb. der kais. Akad.) nicht zu stören, sollen dieselben jetzt schon zusammengestellt werden.

a) Zwei in einer J_n^k enthaltene $J_n^{k'}$ und $J_n^{k''}$ haben eine $J_n^{k'+k''-k}$ gemein.

b) Eine J_n^k ist durch $k+1$ von einander unabhängige Gruppen bestimmt; ist $k'+k''=k+1$, so bestimmen $J_n^{k'}$ und $J_n^{k''}$, welche eine $J_n^{k'+k''-k}$ gemein haben, eine J_n^k.

c) Eine J_n^k ist bestimmt durch $k-i$ J_n^{i+1}, welche eine J_n^i gemein haben.

d) Eine J_n^k besitzt gewisse neutrale Elemente, welche mit einem weitern Punkte des Trägers eine Gruppe der J_n^k bestimmen. Ein neutrales Element soll nun „von der σ-ten Stufe“ genannt werden, wenn erst durch σ-Punkte des Trägers eine Gruppe der Involution individualisirt ist. Die Anzahl der Punkte, aus welchen ein solches neutrales Element besteht, kann auch kleiner sein

als k, in welchem Falle aber σ vermehrt um diese Zahl grösser als k sein muss; ein vielfaches Element einer Involution ist ein neutrales Element der nullten Stufe.

Ein neutrales Element soll „hyperneutral" heissen, wenn σ so gross ist, dass jede n-punktige Gruppe, welche es enthält, zur Involution gehört; ein n-faches Element einer J^k_n kann als hyperneutral aufgefasst werden.

2. Die $\mathfrak{C}_n$ (siehe Artikel 1 von Geometr. Darstellung etc. im Juliheft der Sitzb. der kais. Akad.), welche für alle Gruppen (a) einer auf einer Geraden T befindlichen J^k_n, für einen festen Punkt o und für dieselben Punkte v und s construirt werden, bilden ein Curvensystem k-ter Stufe. Die Tangenten (t) ihres $(n-1)$-fachen Punktes v bilden eine J^k_{n-1}, welche der J^k_n projectiv ist, und man hat daher (mit Hilfe von Satz 1 in G. D.):

Satz 1. Die r-ten Polaren eines Poles o bezüglich der Gruppen einer J^k_n bilden eine zu dieser projective J^k_{n-r} welche mit $(J^k_n)^o_r$ bezeichnet werden soll. (Vrgl. Cremona Oberflächen, Seite 69.)

Es folgt auch:

Satz 2. Die $(J^k_n)^o_r$ ist bestimmt durch die r-ten Polaren von o in Bezug auf die Theile der J^k_n, welche sie nach *b)* und *c)* festlegen.

Satz 3. Die Gruppen (a), für welche $n-r-\sigma$ gegebene Punkte (p) der r-ten Polare für einen Pol o angehören, bilden eine $J^{r+\sigma}_n$, welche in o ein $(n-r+1)$-faches hyperneutrales Element und in den Punkten (p) $(r+1)$-fache neutrale Elemente σ-ter Stufe besitzt. Denn nimmt man $r+\sigma$ Punkte (q) der Gruppe (a) an, so bilden die (a), welche diese enthalten, eine $J^{n-r-\sigma}_n$, welcher die $(J^{n-r-\sigma}_n)^o_r$ projectiv ist. Unter den Gruppen der letztern, welche nach Satz 1 eine $J^{n-r-\sigma}_{n-r}$ ist, gibt es nun eine die Gruppe (p) enthaltende, und dieser entspricht in der Projectivität mit $J^{n-r-\sigma}_n$ nur eine (a), welche die Punkte (q) besitzt. Durch die Punkte (q) ist demnach die ganze Gruppe (a) eindeutig bestimmt, wodurch der erste Theil des obigen Satzes bewiesen ist.

Wird o als $(n-r+1)$-faches Element einer Gruppe (a) angenommen, so wird $(a)^o_r$ (nach G. D. 3. *b.*) unbestimmt, kann

also auch die Punkte (p) enthalten. Demnach genügt eine Gruppe (a), welche aus dem $(n-r+1)$-fachen Punkt o und $r-1$ beliebigen Punkten der Geraden besteht, den gestellten Bedingungen, woraus sich die Singularität in o ergibt.

Nach dem ersten Theile dieses Satzes gibt es eine J_n^σ solcher (a), welche einen Punkt p von (p) $(r+1)$-mal enthalten und die übrigen $n-r-\sigma-1$ Punkte von (p) zu Punkten ihrer $(a)_r^o$ haben. Dann fällt aber auch ein Punkt von $(a)_r^o$ nach p, die Gruppen dieser J_n^σ haben daher die verlangte Eigenschaft, und p ist folglich ein $(r+1)$-faches neutrales Element σ-ter Stufe der $J_n^{\sigma+k}$

(Die den Gruppen der $J_n^{r+\sigma}$ für bestimmte auf einem Strahle durch o gelegene Punkte v und s entsprechenden Curven $\mathfrak{C}_n$, bilden ein Curvensystem $(r+\sigma)$-ter Stufe, dessen Curven sich in ihrem n-ten mit os gemeinschaftlichen Punkte $(n-r+1)$-punktig berühren.)

Aus Satz 3 folgt noch: Haben zwei n-punktige Gruppen für denselben Pol r-te Polaren, welche $n-r-\sigma$ Punkte gemein haben, so können sie, wenn sie nicht identisch sein sollen, nur $r+\sigma-1$ Punkte gemeinschaftlich besitzen.

In den nächsten Nummern werden Umkehrungen des Satzes 3 bewiesen werden.

3. Satz 4. Hat eine J_n^1 einen n-fachen Punkt o, so sind ihre $n-1$ Doppelpunkte die erste Polare von o bezüglich aller ihrer Gruppen. Setzt man nämlich in Satz 3 $r=1$, $\sigma=o$, so erhält man einen leicht auszusprechenden Satz, dessen Umkehrung, Satz 4, gilt, weil (nach Weyr, Über Involutionen höherer Grade; Crelles Journal Bd. 72) eine Involution bestimmt ist, sobald von ihr ein n-facher Punkt und $n-1$ Doppelpunkte gegeben sind.

Satz 5. Hat eine J_n^r ein $(n-r+1)$-faches hyperneutrales Element o, so ist die $(J_n^r)_s^o$ von der Stufe $r-s$. Die Gruppen von J_n^r, welche den Punkt $o(n-r+1)$-mal enthalten, bilden nach der Definition eines hyperneutralen Elementes in *d)* eine J_n^{r-1}. $(J_n^{r-1})_1^o$ ist eine J_{n-1}^{r-2}, deren Gruppen in o einen $(n-r+1)$-fachen Punkt besitzen. Für eine beliebige zu J_n^r gehörende J_n^2 ist die $(J_n^2)_1^o$ eine J_{n-1}^2 und schneidet, da J_n^2 mit J_1^{r-1} eine J_n^1 gemein hat, die obige J_{n-1}^{r-2} in einer J_{n-1}^1. Da

nun die J_n^{r-1} und J_n^2 nach *c)* die J_n^r bestimmen, so bestimmen die J_{n-1}^2 und J_{n-1}^{r-2} nach Satz 2 die $(J_n^r)_1^o$; letztere ist daher eine J_{n-1}^{r-1}, welche in o ebenfalls ein $(n-r+1)$-faches hyperneutrales Element besitzt. Hieraus folgt der obige Satz.

Ist in Satz 5 $s=r-1$, so ist $(J_n^r)_{r-1}^o$ eine J_{n-r+1}^1, welche in o einen $(n-r+1)$-fachen Punkt hat. $(J_{n-r+1}^1)_1^o \equiv (J_n^r)_r^o$ besteht, daher nach Satz 4 aus den $n-r$ Doppelpunkten (p) der J_{n-r+1}^1, welche nach Satz 3. $(r+1)$-fache Punkte einer J_n^r sind, die mit der gegebenen J_n^r identisch sein muss. Hätte letztere einen andern $(r+1)$-fachen Punkt, so müsste er zu der $(a)_r^o$ derjenigen Gruppe (a) gehören, die ihn enthält und müsste daher einer der Punkte (p) sein. Man kann daher sagen:

Satz 6. Hat eine J_n^r ein $(n-r+1)$-faches hyperneutrales Element o, so besitzt sie $n-r$. .$(r+1)$-fache Punkte, welche die r-te Polare von o bezüglich jeder Gruppe der J_n^r bilden.

4. Satz 7. Hat eine J_n^k ein $(n-r+1)$-faches hyperneutrales Element o (wobei $r \gtreqless k$ sein muss) und ein neutrales $(r+1)$-faches Element p von der Stufe $(k-r)$, so gehört p der r-ten Polare von o für jede Gruppe der Involution an; die Anzahl der Punkte p muss $\gtreqless n-k$ sein. Nach *c)* ist die J_n^k durch $k-r+1$ J_n^r bestimmt, welchen die J_n^{r-1} (s. 3) angehört. Eine solche J_n^r hat in o ein $(n-r+1)$-faches hyperneutrales Element und schneidet die J_n^{k-r}, welche dem Punkte p zugehört, nach *a)* in einer Gruppe. p ist daher einer ihrer $(r+1)$-fachen Punkte und nach Satz 6 ein Punkt der $(J_n^r)_r^o$. Die sich so für die obigen $k-r+1$ J_n^r ergebenden Polaren bestimmen eine J_n^{k-r}, welche, nach Satz 2, identisch $(J_n^k)_r^o$ ist, und von der jede Gruppe den Punkt p enthält, weil die die Involution bestimmenden ihn enthalten. Hieraus folgt Satz 7.

Wäre die Anzahl der Punkte p grösser als $n-k$ z. B. $=n-k+l$, so müssten nach Satz 3 die möglichen Gruppen (a), für welche diese Punkte der $(a)_r^o$ angehören, eine J_n^{k-l} bilden; da nun aber nach Satz 7 die Gruppen der angenommenen J_n^k solche Gruppen sind, so ist die Annahme $p > n-k$ unzulässig.

5. Die Sätze in 3 und 4 lassen für rationale Curven mannigfache Folgerungen zu, indem man z. B. auf diesen Curven nur J_n^r,

welche von Geraden, Ebenen und Flächen ausgeschnitten werden, und welche ein $(n-r+1)$-faches hyperneutrales Element o besitzen, aufzusuchen braucht. Es ergibt sich dann die Anzahl der singulären Punkte der Curve, welche dadurch definirt sind, dass das schneidende Gebilde in ihnen $r+1$ zusammenfallende Punkte mit ihr gemein hat, als $n-r$, und dass diese Punkte die r-te Polare des Poles o für die Schnittgruppen sind. Satz 7 findet eine ähnliche Verwendung.

Bildet man die Curve auf eine Gerade ab, so kennt man, wenn die Bilder der hier genannten Singularitäten gegeben sind, sofort die Bilder ihrer Geraden-, Ebenen- und Flächengruppen und kann, indem man umgekehrt bekannte Sätze über Polargruppen auf einer Geraden auf rationale Curven überträgt zu Sätzen gelangen, welche sich nicht auf solche Polargruppen beziehen. So verhalten sich die linearen und Tangential-Gruppen einer C_3^3 oder Raum-C_4 mit Spitze wie die Tripel resp. Quadrupel einer Geraden, welche denselben Schwerpunkt haben. Beispiel: Die Punkte der Cissoide aus der Spitze erstens auf eine Parallele zur Spitzentangente, zweitens auf die Wendetangente projicirt.

Um zu dem Obigen ein anderes Beispiel vorzuführen, sei eine räumliche C_3 gegeben, welche eine Gerade g in einem Punkte o schneidet; dann bilden die Punktetripel der C_3, deren Schmiegungsebenen sich auf einem Punkte von g schneiden, eine cubische Involution, welche in o einen dreifachen Punkt hat. Daher besteht nach Satz 4 die erste Polargruppe von o für ein solches Tripel aus den Berührungspunkten der Tangentialebenen, welche sich von g an die Curve legen lassen. Projicirt man das Ganze aus einem Punkte von g auf eine Ebene, so erhält man die Sätze über C_3^4, welche Herr Professor Emil Weyr im 81. Bande der Sitzb., S. 843 bekannt gegeben.

Von anderen Folgerungen sollen nachstehende hervorgehoben werden:

Hat eine {Gerade / Ebene / Gerade} A in einem Punkte o mit einer {ebenen / räumlichen / räumlichen} rationalen C_n eine {n / n / $n-1$}-punktige Be-

rührung, so besteht die $\left.\begin{matrix}\text{erste}\\ \text{erste}\\ \text{zweite}\end{matrix}\right\}$ Polare dieses Punktes für eine $\left.\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ebene}\\ \text{ebene}\end{matrix}\right\}$ Gruppe der Curve aus den $\left.\begin{matrix}\text{Berührungs-}\\ \text{Berührungs-}\\ \text{Osculations-}\end{matrix}\right\}$ Punkten der $\left.\begin{matrix}\text{Tangenten}\\ \text{Tangentialebenen}\\ \text{Schmiegungsebenen}\end{matrix}\right\}$, welche sich von ($A$; B) an die Curve legen lassen und aus den $\left.\begin{matrix}\text{Spitzen}\\ \text{Spitzen}\\ \text{Inflexionspunkten}\end{matrix}\right\}$ der Curve, deren Anzahl nicht $\left.\begin{matrix}n-2\\ > n-3\\ n-3\end{matrix}\right\}$ sein kann.

Die $n-2$ Wendepunkte einer ebenen C_n mit einem $(n-1)$-fachen Punkt o, dessen Tangenten in eine Gerade zusammenfallen, sind die zweite Polare für jede gerade Gruppe der Curve und gehören der ersten Polare für jede solche Gruppe von n Punkten an, deren Tangenten sich in einem Punkte p schneiden. Der n-te Schnittpunkt von op mit der Curve ist auch ein Punkt der letzteren Polare.

Die $n-3$ Punkte, in welchen eine räumliche C_n mit einem $(n-2)$-fachen Punkt o, dessen Tangenten in eine Gerade zusammenfallen, von einer Ebene hyperosculirt wird, sind die dritte Polare von o bezüglich jeder ebenen Gruppe der Curve.

Die Sätze, welche sich hieraus für einen Punkt einer Raum-C_3 und für eine Raum-C_4 mit Spitze, für einen Wendepunkt einer ebenen C_3^4, einen Undulationspunkt einer ebenen C_4, für eine C_3^3 u. s. w. ergeben, sollen nicht erst specialisirt, sowie auch die dualen, welche sich auf die Gruppen von Curvenpunkten beziehen, deren Tangenten, respective Schmiegungsebenen durch einen Punkt gehen, nicht ausgesprochen werden.

6. Sind die Punkte (p) des Satzes 3 und ihr Pol o gegeben und ausserdem für einen Pol o' ... ρ' Punkte (p') seiner r'-ten Polare

für die fraglichen Gruppen (a), so bilden die (a), welche die Angabe von (p) liefert, wenn $n-r-\sigma=\rho$ gesetzt wird, eine $J_n^{n-\rho}$, für welche $(J_n^{n-\rho})_{r'}^{o'}$, eine $J_{n-r'}^{n-\rho}$, ist. Durch die Punkte (p') ist eine in letzterer enthaltene $J_{n-r}^{n-\rho-\rho'}$ bestimmt, welcher in der ihr projectiven $J_n^{n-\rho}$ eine $J_n^{n-\rho-\rho'}$ entspricht, deren Gruppen (a) den gestellten Bedingungen genügen. Ist $\rho+\rho'=n$, die Stufe der letzten Involution, demnach 0, so ist die Gruppe (a) eindeutig bestimmt.

Man schliesst so weiter, dass wenn allgemein die Gleichung $\rho+\rho'+\rho''+\rho''' \qquad =n$ stattfindet, wobei die Zahlen $\rho''\rho'''$ den gegebenen Polen $o''o'''$ in analoger Weise entsprechen, wie die Zahl ρ dem Pole o, dass dann (a) eindeutig bestimmt ist und erhält:

Satz 8. Eine n-punktige Gruppe ist eindeutig bestimmt, sobald für eine beliebige Anzahl Pole zusammen n-Punkte beliebiger ihrer Polaren gegeben sind.

7. Wie gross ist x, die Stufe und z, der Index, d. h. die Zahl der durch x gegebene Punkte bestimmten Gruppen des Systems derjenigen Gruppen (a), welche ρ gegebene Punkte (p) zu Punkten einer ihrer r-ten Polaren haben?

Wird ein Pol o angenommen, so müssen nach Satz 3 die Gruppen (a) eine $J_n^{n-\rho}$ bilden. Es gibt so $\infty^{n-\rho}$, und wenn noch o variirt $\infty^{n-\rho+1}$ Gruppen (a); x ist daher gleich $n-\rho+1$. Werden also $n-\rho+1$ Punkte (a') von (a) angenommen, so sind hiedurch z Gruppen (a) bestimmt. Für jede dieser Gruppen hat die r-te Polare, deren Theil (p) ist, einen Pol und es ist daher z der Anzahl dieser Pole gleich; um z zu finden, kann demnach die letztere Zahl bestimmt werden.

Die $(n-r)$-te Polare eines Punktes von (p) bezüglich aller (a), welche die angenommenen Punkte (a') enthalten, und welche eine $J_n^{\rho-1}$ bilden, sind nach Satz 1 Gruppen einer $J_r^{\rho-1}$, welche auf die $J_n^{\rho-1}$ projectiv bezogen ist, und man erhält für jeden der Punkte (p) je eine Involution $J_1 J_2 \ldots J_\rho$, welche, da sie in Bezug auf die Involution der (a) auch untereinander projectiv bezogen sind.

Nun gibt es, wie man aus Artikel 144 von Cremona, Oberflächen, entnimmt, $r\rho$ Punkte, welche zugleich in entsprechenden

Gruppen der ρ projectiven Involutionen liegen. Ein solcher Punkt ist in der $(n-r)$-ten Polare eines jeden der Punkte (p) bezüglich einer Gruppe (a) enthalten, welcher die Gruppe (a') angehört, ist also einer der z gesuchten Punkte, und man hat:

Satz 9. Sind ρ Punkte der r-ten Polare gegeben, so bilden die zugehörigen Fundamentalgruppen (a) ein System von der Stufe $n+1-\rho$ und vom Index $r\rho$.

Hieraus folgt auch: Zwei n-punktige Gruppen, für welche zwei ihrer r-ten Polaren dieselben ρ-Punkte besitzen, können, wenn sie nicht identisch sein sollen, nur $n-\rho$ Punkte gemein haben.